Лекція № 17

5.3. Чотиривимірний вектор густини електричного струму. Закон збереження заряду. Рівняння неперервності

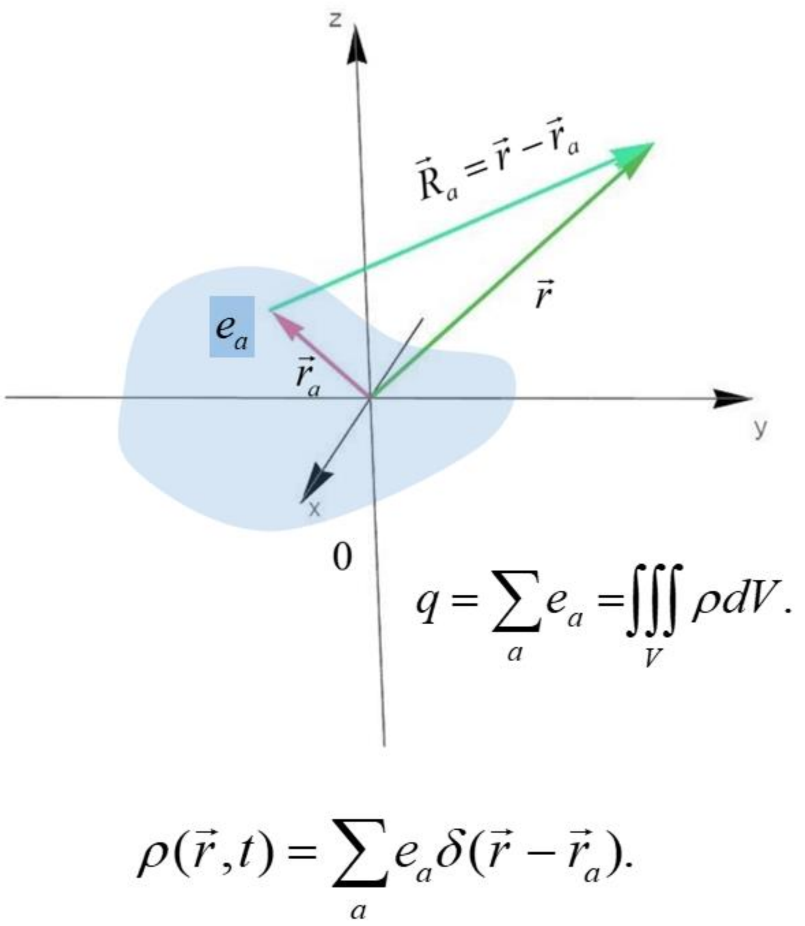
В класичній електродинаміці заряди розглядаються, як точкові. Але для математичної зручності є сенс ввести неперервний розподіл зарядів у просторі та густину заряду $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ так, щоб величина ρdV визначала заряд, який знаходиться в об'ємі dV. Заряд в певному скінченному об'ємі визначається так

$$q = \sum_a e_a = \iiint_V \rho dV. \tag{5.15}$$

Заряди насправді є точковими, тому густина $\rho(\vec{r}, t)$ дорівнює нулю всюди, окрім точок, в яких знаходяться заряди. В цих точках вона є нескінченною. Задати густину заряду можна за допомогою дельта-функції так

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \tag{5.16}$$

Тут e_a – величина заряду, який знаходиться в точці $\vec{r}_a$. Сума береться по всіх зарядах. $\vec{r}$ – радіус-вектор точки спостереження (див. рис.)



Нагадаємо властивості дельта-функції Дірака.

Відноситься до так званих узагальнених функцій. Виглядає формально так:

$$\delta(x-a)=\begin{cases}\infty, & x=a;\\ 0, & x\neq a.\end{cases}$$

Дельта-функція Дірака – це ядро одиничного оператора.

$$Def: \quad \psi(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\delta(x-a)dx; \tag{5.17}$$

Дельта-функція є парною функцією

$$\delta(-x)=\delta(x).$$

З визначення (5.17) випливає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1.$$

Ще кілька корисні формули для дельта-функції

$$\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x);$$

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{\left|\dfrac{df}{dx_i}\right|}\delta(x-x_i); \quad f(x_i)=0.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dx=\delta(k); \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dk=\delta(x).$$

Тривимірна дельта-функція $\delta(\vec{r})$ є добутком трьох одновимірних

$$\delta(\vec{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Повертаємось до обговорення властивостей введеної густини заряду.

Заряд по самому своєму визначенню є інваріантом. Це характеристика елементарної частинки, величина заряду не залежить від вибору системи відліку.

Це твердження визначає закон збереження заряду.

Густина ж заряду $\rho(\vec{r},t)$ не є 4- інваріантом. Інваріантом (4-скаляром) є добуток $de = \rho dV$.

Розглянемо добуток скаляру de та 4-вектору dx^i

$$\underbrace{de\;dx^i}_{4-vector} = \rho dV dx^i = \rho dV dt\frac{dx^i}{dt} = \underbrace{\rho\frac{dx^i}{dt}}_{4-vector}\underbrace{dVdt}_{4-scalar}$$

Таким чином, величина $\rho\dfrac{dx^i}{dt}$ є 4-вектором. Назвемо цей **4-вектор** вектором **густини струму**

$$j^i = \rho\frac{dx^i}{dt} = \left(c\rho, \rho\vec{\upsilon}\right) = \left(c\rho, \vec{j}\right) \tag{5.18}$$

Просторові компоненти (5.18) складають тривимірний вектор густини струму

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon} = \sum_a e_a\vec{\upsilon}_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a) \tag{5.19}$$

Повний заряд (5.15) тепер можна задати в 4-вигляді

$$\iiint\limits_V \rho dV = \frac{1}{c}\iiint\limits_V j^0 dV = \frac{1}{c}\int j^i dS_i \tag{5.20}$$

В (5.20) інтегрування відбувається по тривимірному об'єму, який для 4-простору є гіперповерхнею, ортогональною напрямку осі $x^0 = ct$. Інтеграл $\dfrac{1}{c}\int j^i dS_i$, взятий по будь-якій гіперповерхні, є сумою зарядів, світові лінії яких перетинають цю гіперповерхню.

Введення густини струму дозволить написати другий доданок

$$S_{mf} = -\sum_a\frac{e_a}{c}\int A_i(x_a)dx_a^i$$

в формулі (5.14) для функції дії електромагнітного поля (див. також (5.10)) у вигляді інтегралу по 4-об'єму:

$$\sum_a e_a = \int\rho dV; \quad j^i = \rho\frac{dx^i}{dt};$$

$$S_{mf} = -\sum_a\frac{e_a}{c}\int A_i(x_a)\frac{dx_a^i}{dt}dt = -\frac{1}{c}\int\rho\frac{dx^i}{dt}A_i dVdt = -\frac{1}{c^2}\int\underbrace{\rho\frac{dx^i}{dt}}_{j^i}A_i\underbrace{dVcdt}_{d\Omega} =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\int j^i A_i d\Omega.$$

Функція дії для електромагнітного поля (5.14) тепер приймає вигляд

$$S=-\sum_a m_a c\int ds_a-\frac{1}{c^2}\int j^i A_i d\Omega-\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}d\Omega. \tag{5.21}$$

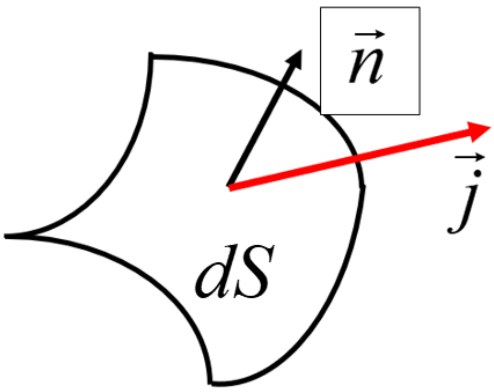
Другий та третій інтеграли ми використаємо для виведення другої пари рівнянь Максвелла за допомогою принципу найменшої дії.

Рівняння неперервності

З'ясуємо, як змінюється з часом заряд в певному об'ємі $\iiint\limits_V \rho dV$, тобто візьмемо похідну

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV.$$

Ця похідна визначає кількість заряду, який «виходить» або «виходить» з цього об'єму за одиницю часу – пересікає поверхню, яка обмежує цей об'єм. Відповідна густина струму $\vec{j}=\rho\vec{v}$. Через нескінченно малу площину за одиницю часу проходить заряд (див. рис.) $\vec{j}d\vec{S}=\rho\vec{v}d\vec{S}$



Повна кількість заряду, який переміщується за одиницю часу через замкнену поверхню, яка обмежує певний об'єм

$$\oiint\limits_S \rho\vec{v}d\vec{S}=\oiint\limits_S \vec{j}d\vec{S}$$

Закон збереження заряду є дослідним фактом, тому стверджуємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV=-\oiint\limits_S \vec{j}d\vec{S}. \tag{5.22}$$

Рівняння (5.22) – це рівняння неперервності в інтегральному вигляді. Воно є математичним виразом закону збереження заряду.

Рівняння неперервності можна написати в диференціальній формі. Скористаємось теоремою Гауса–Остроградського та замінимо справа інтеграл $\oiint_S \vec{j}d\vec{S}$ по замкненій поверхні на інтеграл від дивергенції $\vec{j}$ по об'єму, який знаходиться всередині цієї поверхні $\iiint_V \mathrm{div}\vec{j}dV$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = -\iiint_V \mathrm{div}\vec{j}dV; \quad \iiint_V \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}\right)}_{=0} dV = 0.$$

Отримуємо рівняння неперервності в диференціальній формі

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0. \tag{5.23}$$

Покажемо, що густина струму у вигляді (5.16) задовольняє рівнянню неперервності (5.23). Достатньо розглянути один точковий заряд.

Густина струму для точкового заряду e, який має радіус-вектор $\vec{r}_0(t)$ визначається так

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon} = e\vec{\upsilon}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)).$$

Візьмемо похідну по часу від густини заряду $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}_0(t)}\frac{\partial\vec{r}_0(t)}{\partial t} = -\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}}\vec{\upsilon} = -\vec{\upsilon}\mathrm{grad}\rho.$

ρ є функцією від $\vec{r} - \vec{r}_0(t)$, тому $\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}_0(t)} = -\frac{\partial\rho}{\partial\vec{r}}$

Згадаємо формулу

$$\mathrm{div}\left(\varphi\vec{a}\right) = \vec{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi + \varphi\mathrm{div}\vec{a}$$

Звідси

$$-\vec{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi = -\mathrm{div}\left(\varphi\vec{a}\right) + \varphi\mathrm{div}\vec{a}$$

В даному випадку швидкість $\vec{\upsilon} = \frac{\partial\vec{r}_0(t)}{\partial t}$ не залежить від $\vec{r}$, тому

$$-\vec{\upsilon}\mathrm{grad}\rho = -\mathrm{div}\left(\rho\vec{\upsilon}\right) + \rho\underbrace{\mathrm{div}\vec{\upsilon}}_{=0} = -\mathrm{div}\left(\vec{j}\right)$$

Отримали рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(\vec{j}\right).$$

Рівняння неперервності можна написати у 4-вигляді

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} + \mathrm{div}\vec{j} = 0; \quad \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.$$

4-дивергенція від 4-густини струму дорівнює нулю

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{5.24}$$

При такій властивості 4-густини струму теорія буде зберігати градієнтну (калібрувальну) інваріантність.

Ще раз підкреслимо, що закон збереження заряду є фундаментальним законом природи, дослідним фактом.

5.4. Друга пара рівнянь Максвелла. Виведення з принципу найменшої дії

Для отримання другої пари рівнянь Максвелла з принципу найменшої дії нам потрібні другий та третій доданки в формулі для функції дії (5.21)

$$S = S_m + S_{mf} + S_f = \cancel{-\sum_a m_a c \int ds_a} - \frac{1}{c^2}\int j^i A_i d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F^{ik} F_{ik} d\Omega.$$

Роль узагальнених координат в

$$S_{mf} + S_f = -\frac{1}{c^2}\int j^i A_i d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik} F^{ik} d\Omega. \tag{5.25}$$

відіграють компоненти 4-потенціалу A^i. Нагадаємо, що компоненти тензору електромагнітного поля (ф-ла (4.27)) пов'язані із похідними від A^i таким чином:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}; \quad F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}.$$

Для виведення рівнянь поля з принципу найменшої дії варіювати потрібно тільки A^i, бо рух зарядів тепер вважається заданим. (При виведенні рівняння руху заряду в полі навпаки заданим вважалося поле й варіювали траєкторію частинки.)

Маємо

$$\delta(S_{mf}+S_f)=-\frac{1}{c^2}\int j^i\delta A_i d\Omega-\frac{1}{16\pi c}\int\delta(F^{ik}F_{ik})d\Omega=0.$$

Варіація від згортки $F^{ik}F_{ik}=F_{ik}F^{ik}$:

$$\delta(S_{mf}+S_f)=-\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i+\frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right]d\Omega=0.$$

Перетворимо другий доданок під знаком інтегралу, врахувавши антисиметрію тензору $F^{ik}=-F^{ki}$:

$$\delta F_{ik}=\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k-\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i;$$

$$F^{ik}\delta F_{ik}=\underbrace{F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k}_{i\rightleftarrows k}-F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i=\underbrace{F^{ki}}_{=-F^{ik}}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i-F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i=$$

$$=-2F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i.$$

$$\delta(S_{mf}+S_f)=-\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i-\frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right]d\Omega=0.$$

Застосуємо теорем Гауса до другого інтегралу, скориставшись тим, що

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F^{ik}\delta A_i\right)=\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i+F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i;$$

$$-F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i=-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F^{ik}\delta A_i\right)+\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i.$$

$$-\int\left[F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right]d\Omega=\int\left[-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F^{ik}\delta A_i\right)+\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i\right]d\Omega=$$

$$=-\int\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F^{ik}\delta A_i\right)\right]d\Omega+\int\left[\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i\right]d\Omega=-\boxed{\underbrace{\oint F^{ik}\delta A_i dS_k}_{=0}}+\int\left[\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i\right]d\Omega.$$

Інтегрування в $\oint F^{ik}\delta A_i dS_k$ відбувається по гіперповерхні у 4-просторі. Просторові координати вважаються нескінченними. Електромагнітного поля на нескінченності немає $F^{ik}=0$. Значення 4-потенціалу фіксовані у початковий та в кінцевий моменти часу, тому відповідні варіації дорівнюють нулю $\delta A_i(t_1)=\delta A_i(t_2)=0$. Таким чином, $\oint F^{ik}\delta A_i dS_k=0$.

Тепер

$$\delta(S_{mf}+S_f)=-\frac{1}{c}\int\underbrace{\left[\frac{1}{c}j^i+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right]}_{=0}\underbrace{\delta A_i}_{\neq 0}\,d\Omega=0,$$

тобто дорівнює нулю підінтегральний член у квадратних дужках.

Отримали другу пару рівнянь Максвелла у 4-вигляді

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{5.26}$$